

★

Exercice 1

On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes U, V, W suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs α, β, γ . On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$

- 1) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$ (classique).
- 2) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$

★★

Exercice 2

(D'après écrit ENS 2022)

Premier jeu On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 et si elle tombe sur face, on perd 10. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

Pour $i \geq 1$, on note X_i la variable aléatoire égale à 11 si la i -ème pièce tombe sur pile et égale à -10 si elle tombe sur face.

- 1) Calculer l'espérance $E(X_i)$ de X_i , pour $i \geq 1$.

On note $S_0 = 100$ le montant initial et S_n le montant obtenu après n lancers.

- 2)
 - a) Pour $n \geq 1$, exprimer S_n en fonction des $X_i, i \geq 1$.
 - b) Calculer la probabilité $P(S_2 = k)$ pour tout entier k .
 - c) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E(S_n)$.
- 3)
 - a) Montrer que $P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{2}{3}$
 - b) Montrer que $P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

On suppose maintenant qu'on arrête le jeu dès lors que le montant S_n devient inférieur ou égal à 89 ou supérieur ou égal à 105. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de pièces lancées avant l'arrêt du jeu.

- 4)
 - a) Calculer $P(T = 1)$
 - b) Calculer $P(T = 2)$
 - c) Si $T \geq 3$, que vaut S_2 ?
 - d) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant supérieur à 100 sachant que l'on a tiré 3 pièces ou moins ?
 - e) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant égal à 105 ?

Second jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11% de notre montant actuel et si elle tombe sur face, on perd 10% de notre montant actuel. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

Pour $i \geq 1$, on note Y_i la variable aléatoire égale à 1,11 si la i -ème pièce tombe sur pile et égale à 0,9 si elle tombe sur face.

- 5) Calculer l'espérance $E(Y_i)$ pour $i \geq 1$.

On note $\Pi_0 = 100$ le montant initial et Π_n le montant obtenu après n lancers.

- 6)
 - a) Pour $n \geq 1$, exprimer Π_n en fonction des $Y_i, i \geq 1$.
 - b) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E(\Pi_n)$.

On note $\alpha = -E(\ln(Y_1))$.

- 7)
 - a) Montrer que $\alpha > 0$.
 - b) Montrer que $P(\Pi_n \leq 100 e^{-\frac{\alpha}{2}n}) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 8)
 - a) En quoi ce second jeu peut-il paraître paradoxal ?
 - b) Si vous aviez le choix, préféreriez-vous jouer au premier jeu ou au second ? Justifier brièvement votre réponse.

★★

Exercice 3

Soit N un entier naturel non nul. On lance N fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile et Y le nombre de faces obtenus.

- 1) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$, où $\rho(X, Y)$ désigne le coefficient de corrélation entre X et Y . X et Y sont-elles indépendantes ?
- 2) On suppose dans cette question que N suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
 - a) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$

- b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 3) On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- a) Déterminer les lois de X et Y .
- b) Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$
- c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

★ ★ ★
 Exercice 4

On considère une urne contenant des boules jaunes, noires et bleues en proportions p , q et r respectivement. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à obtention pour la deuxième fois d'une boule bleue. On note X le nombre de tirage effectués et Y le nombre de boules jaunes obtenus lors de cette série de tirages.

- 1) Montrer que la probabilité de n'obtenir qu'au plus une boule bleue au cours d'une infinité de tirage est nulle. Qu'en déduit-on ?

Préciser la loi de X .

- 2) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel a vérifiant $|a| < 1$ on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} a^k = \frac{1}{(1-a)^{n+1}}$

- 3) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) , en déduire la loi de Y .

★
 Exercice 5

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$, on note V la variable aléatoire définie par $V = \frac{1}{\sqrt{U}}$.

- 1) a) Justifier que V est à valeurs dans $[1, +\infty[$.
- b) Montrer que la fonction de répartition de V est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- c) En déduire que V est une variable aléatoire à densité, et donner une densité f_V de V .

- 2) Déterminer si V admet une espérance et une variance, calculer leurs valeurs éventuelles.

La variable aléatoire V suit une **loi de Pareto**. Cette loi est utilisée par les compagnies d'assurance pour modéliser les montants des sinistres. Afin d'établir des prévisions, un actuair e étudie une suite $(V_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi que V , la variable aléatoire V_i représente le coût du i -ème sinistre survenu à partir d'un instant donné.

On suppose que le nombre de sinistres se produisant au cours d'une année est donné par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On s'intéresse au nombre de sinistres dont le coût dépasse un certain montant $A > 1$. On note ainsi T la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de (V_1, \dots, V_N) prenant une valeur supérieure à A , formellement :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = |\{i \in \llbracket 1, N(\omega) \rrbracket; V_i(\omega) > A\}|$$

où la notation $|\cdot|$ désigne le cardinal.

- 3) Exprimer $P(N = n)$ pour tout $n \in N(\Omega)$.
- 4) Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par T ?
- 5) Justifier que pour tout n dans \mathbb{N} et tout k dans \mathbb{N} on a :

$$P_{[N=n]}(T = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A}\right)^{2k} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

- 6) Calculer $P(T = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis reconnaître la loi de T .
- 7) En moyenne, combien de sinistres avec un coût supérieur à A surviennent en un an ?